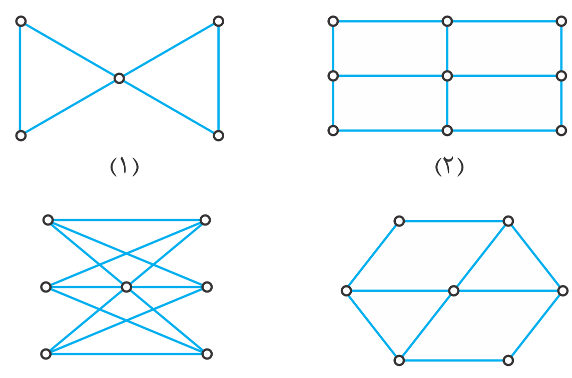
داستان گراف‌های هامیلتونی

نویسنده : دکتر محرم نژاد ایردموسی

معمولاً در نامگذاری اشیای ریاضی از نام ریاضی‌دانان کمک می‌گیرند. به عنوان مثال، قضیه منلائوس، اتحاد خیام ـ پاسکال، تابع دیریکله و ... در این‌جا قصد داریم از ریاضی‌دانی صحبت کنیم که از نام او در نامگذاری دسته مهمی از گراف‌ها استفاده شده است.

یک دور هامیلتونی در گراف G از مرتبه‌ی n، دوری است که از همه رئوس G بگذرد. به عبارت دیگر هر دور به طول n از گراف مرتبه‌ی n را در صورت وجود، یک دور هامیلتونی می‌نامیم و هر گرافی که حداقل یک دور هامیلتونی داشته باشد، گراف هامیلتونی نامیده می‌شود. به عنوان مثال گراف‌های K_n (گراف کامل از مرتبه n) و C_n (گراف دوری از مرتبه n) هامیلتونی هستند اما درخت‌ها هیچ‌کدام هامیلتونی نیستندچرا که هیچ دوری ندارند.

تمرین ۱: مشخص کنید کدام یک از گراف‌های زیر، هامیلتونی هستند و در صورت وجود دور هامیلتونی گراف‌ها را مشخص کنید.



(۱) (۲) (۳) (۴)

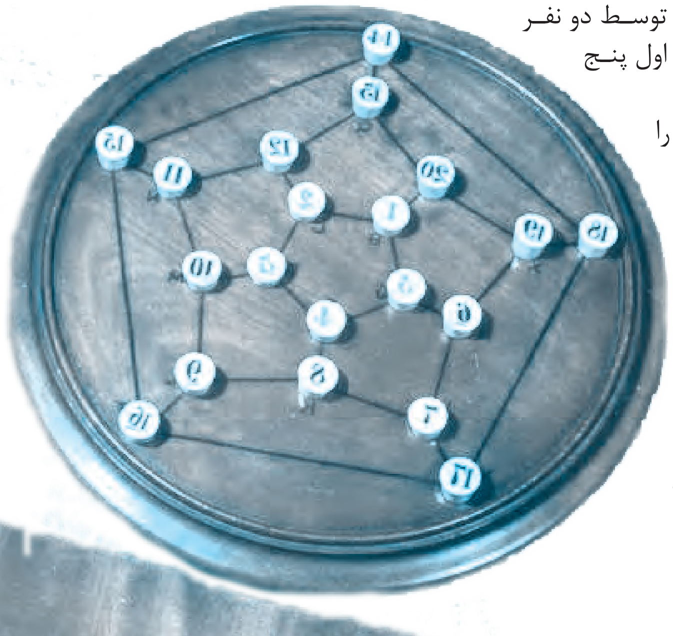
ویلیام روآن هامیلتون[1] (۱۸۶۵-۱۸۰۵) در کودکی، پسری باهوش بود و نبوغ خود را در زمینه‌های مختلفی از جمله زبان و ریاضیات و فیزیک به معلم‌هایش نشان داده بود. به طوری که در سن ده سالگی بر چند زبان مسلط بود. در سال ۱۸۳۲ و در سن ۲۷ سالگی پیش‌بینی کرد که یک اشعه‌ی نور در گذر از یک منشور به طیفی از نورهای رنگی تجزیه خواهد شد. این پیش‌بینی او در آزمایشات سال‌های بعد تأیید شد و در سال ۱۸۳۵، هامیلتون جوان به لقب سِر مفتخر گردید.

در واقع هامیلتون یکی از ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان قرن نوزدهم محسوب می‌شود. اگرچه هامیلتون، دستاوردهای علمی زیادی در زمان خود، به جامعه‌ی علمی تقدیم کرد، اما یکی از معروف‌ترین آن‌ها ابداع دستگاه جبری جدیدی بود به نام کواترنیون‌ها[2].

در شانزدهم اکتبر ۱۸۴۳، هنگامی که با همسر خود در حال قدم زدن در کنار رودخانه رویال دوبلین بود به طور تصادفی دسته‌ای از اعداد چهار بعدی به فرم را ابداع کرد که در آن‌ها a، b، c و d اعدادی حقیقی هستند و $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ او این روابط را روی سنگی در کنار رودخانه حک کرد. با توجه به این‌که $ij = k$ و $ji = -k$ این اعداد خاصیت جابه‌جایی ندارند و از این حیث می‌توانند جالب باشند.

در سال ۱۸۵۶، هامیلتون در ملاقاتی که با انجمن بریتانیا در دوبلین داشت، دستاورد دیگری را که به شکل یک بازی بود ارائه کرد. این بازی به بازی بیست‌تایی معروف بود. در این بازی رئوس یک دوازده وجهی که بیست تا بودند با نام شهرها نامگذاری شده بودند و هر شهر به سه شهر دیگر وصل بود. هدف این بود که مسیری پیدا کنیم که از یک شهر شروع شود و پس از گذشتن از همه شهرها (هر کدام دقیقاً یک بار) مجدداً به شهر اول بازگردد. هامیلتون بازی ابداعی خود را به صاحب یک کارخانه اسباب‌بازی به نام جان جکس[3] به قیمت ۲۵ پوند فروخت و این‌گونه بود که بازی به سرعت گسترش پیدا کرد.

هامیلتون خود کتابچه راهنمای بازی را نوشت و در آن نحوه بازی را توضیح داد. در قسمتی از این کتابچه به بازی زیر اشاره شده است.

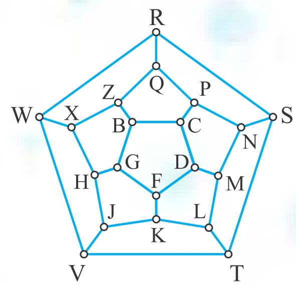


این بازی می‌تواند توسط دو نفر انجام شود. بازیکن اول پنج شهر اول دور هامیلتونی را مشخص می‌کند و بازیکن دوم سعی می‌کند پانزده شهر بعدی را با ترتیبی مشخص کند که یک دور هامیلتونی ایجاد شود. هامیلتون

در ایـن کتابچـه اشـاره می‌کنـد کـه بازیکـن دوم در همـه حالت‌هـا می‌توانـد یـک دور هامیلتونـی پیـدا کنـد.

تمرین ۲:

سـعی کنیـد ایـن بـازی را روی شـکل زیـر کـه گسـترده‌ی همـان دوازده وجهـی بـا ۲۰ رأس است انجـام دهیـد. چـرا همیشـه نفـر دوم می‌توانـد دور هامیلتونـی را ایجـاد کنـد؟



اکنـون شـما می‌دانیـد کـه ایـن بـازی می‌توانـد بـا یـک گـراف از مرتبـه ۲۰ کـه ۳- منظـم اسـت مدلسـازی شـود و پاسـخ مثبـت بـه ایـن بـازی در واقـع نشـان‌دهنده‌ی ایـن اسـت کـه گـراف مذکـور هامیلتونـی اسـت. بـه عبـارت دقیق‌تـر، ایـن گـراف خاصیـت قوی‌تـری دارد و آن ایـن اسـت کـه هـر مسـیر از مرتبـه ۵، می‌توانـد بـه دوری هامیلتونـی گسـترش یابـد.

البتـه بعدهـا معلـوم شـد کـه یـک سـال قبـل از آن‌کـه هامیلتـون بـازی ابداعـی خـود را ارائـه کنـد، ریاضی‌دانـی بـه نـام کرکمـن[۴] مطالعـه دربـاره گراف‌هـای هامیلتونـی را روی چنـد وجهی‌هـا آغـاز کـرده بـود.

امـروزه گراف‌هـای هامیلتونـی دسـته‌ی مهمـی از گراف‌هـا هسـتند و مسـایل بسـیاری دربـاره‌ی ایـن نـوع از گراف‌هـا بی‌پاسـخ مانده‌انـد کـه ذهـن ریاضی‌دانـان را بـه خـود مشـغول کرده‌انـد. بی‌شـک یافتـن شـرطی لازم و کافـی بـرای هامیلتونـی بـودن گراف‌هـا مهم‌تریـن مسـأله در ایـن زمینـه اسـت.

این داستان را با ارائه آخرین تمرین، به پایان می‌بریم.

تمرین ۳:

فـرض کنیـد G یـک گـراف هامیلتونـی باشـد. ثابـت کنیـد بـا حـذف k رأس (و یال‌هـای مجـاور آن‌هـا) از گـراف G، گـراف حاصـل حداکثـر k مؤلفـه همبنـدی خواهـد داشـت (حداکثـر k تکـه خواهـد شـد).

سرگرمی ۵

در هر یک از خانه‌های جدول ۵ × ۵ زیر یک عدد نوشته شده است. بعضی از اعداد را سیاه کنید. طوری‌که هر یک از اعداد باقی مانده، تعداد اعداد باقی‌مانده‌ی اطرافش را نشان دهد.

۲	۴	۳	۲
۳	**۶**	۶	**۴**
۵	۵	۵	۳
۲	۳	**۳**	۲

۲	۴	۴	۴	۲
۴	۷	۶	۵	۳
۳	۵	۵	۵	۳
۵	۵	۵	۵	۳
۱	۴	۳	۳	۲

منابع:

1- G. chartrand, L. Lesniak, P.Zhang “Graphs and digraphs” fifth ed., CRC press 2011